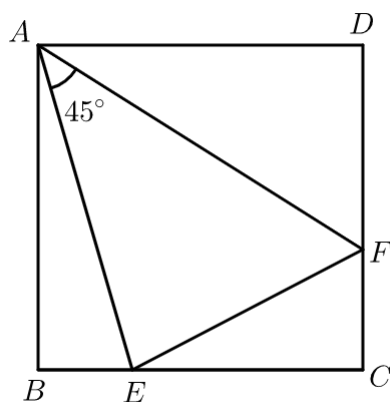


第3讲半角模型和悬挂模型(加油站)

一、半角模型

练习1

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 BC 、 CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， $EF = 5$ ， $BE = 2$ ， $DF = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 3

【解析】 延长 CB 到 G ，使 $BG = FD$ ，

$$\because \angle ABG = \angle D = 90^\circ, AB = AD,$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF,$$

$$\therefore \angle BAG = \angle DAF, AG = AF,$$

$$\because \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

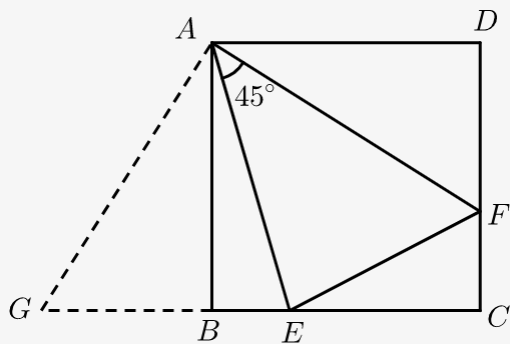
$$\therefore \angle DAF + \angle BAE = \angle EAF,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle GAE,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AEG,$$

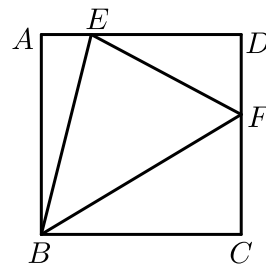
$$\therefore EF = EG = EB + BG = EB + DF.$$

故答案为：3。



【标注】【知识点】正方形与全等综合

2. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为2，点 E 、 F 分别在边 AD 、 CD 上， $\angle EBF = 45^\circ$ ，则 $\triangle EDF$ 的周长等于_____。



【答案】4

【解析】如图，向左延长线段 DA 并截取 AG 使得 $AG = CF$ ，

在正方形中 $\angle C = \angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle GAB = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，

在 $\triangle BCF$ 和 $\triangle BAG$ 中，

$$\begin{cases} GA = FC \\ \angle C = \angle GAB = 90^\circ, \\ AB = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCF \cong \triangle BAG$ ，

$\therefore BG = BF$ ， $\angle GBA = \angle FBC$ ，

$\therefore \angle EBF = 45^\circ$ ，

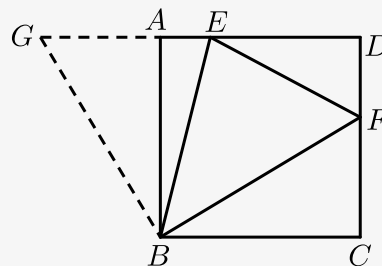
$\therefore \angle ABE + \angle FBC = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle GBE = \angle GBA + \angle ABE = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle GBE = \angle EBF = 45^\circ$ ，

在 $\triangle GBE$ 和 $\triangle FBE$ 中，

$$\begin{cases} BG = BF \\ \angle GBE = \angle EBF, \\ BE = BE \end{cases}$$



$$\therefore \triangle GBE \cong \triangle FBE,$$

$$\therefore EG = EF,$$

$$\therefore EF = AE + GA,$$

$$\therefore AG = CF,$$

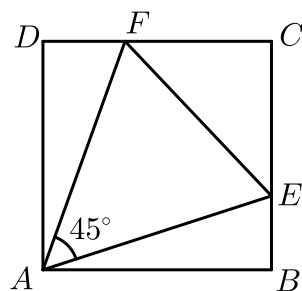
$$\therefore EF = AE + CF,$$

$$\therefore \text{正方形的边长为} 2,$$

$$\therefore C_{\triangle EDF} = ED + DF + EF = ED + AE + DF + FC = AD + DC = 2 + 2 = 4$$

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， $\triangle ECF$ 的周长为8，则正方形 $ABCD$ 的面积为（ ）。



A. 9

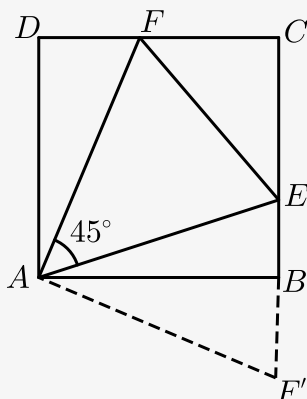
B. 16

C. 20

D. 25

【答案】B

【解析】将 $\triangle DAF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 到 $\triangle BAF'$ 的位置，



由题意可得出： $\triangle DAF \cong \triangle BAF'$ ，

$$\therefore DF = BF', \angle DAF = \angle BAF',$$

$$\therefore \angle EAF' = 45^\circ,$$

在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle F'AE$ 中，

$$\begin{cases} AF = AF' \\ \angle FAE = \angle F'AE, \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle FAE \cong \triangle F'AE$ (SAS),

$\therefore EF = EF'$,

$\therefore \triangle ECF$ 的周长 $= DF + EB + CF + CE = CD + CB = 8$,

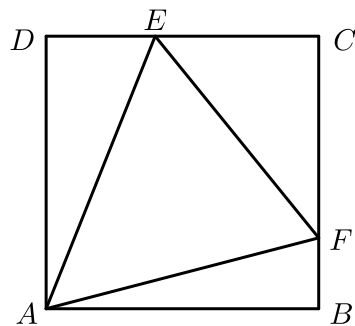
$\therefore AD = 4$,

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的面积为 16.

故选：B.

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

4. 在正方形 $ABCD$ (四边相等, 四个内角都等于 90°) 中, E 、 F 分别为 DC 、 BC 上的点. 若 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形的周长的一半, 则: ① $\angle EAF = 45^\circ$; ② FA 平分 $\angle EFB$; ③ EA 平分 $\angle DEF$, 其中正确的是 ().



A. ①

B. ①②

C. ①②③

D. ②③

【答案】C

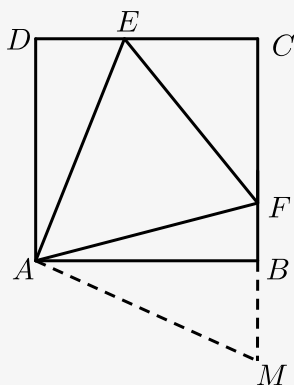
【解析】 $\because CE + CF + EF = \frac{1}{2}(CD + CB + AD + AB)$

$= CD + CB$

$= CE + DE + CF + FB$,

$\therefore EF = DE + BF$,

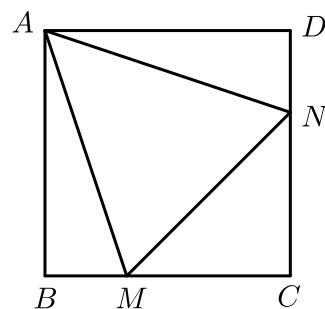
$\therefore$ 延长 FB 至 M 使 $BM = DE$, 连接 AM ,



$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABM$ (SAS) ,
 $\therefore AM = AE$, $\angle DAE = \angle MAB$,
 $\therefore EF = BF + BM = FM$,
 $\therefore \triangle EAF \cong \triangle MAF$ (SSS) ,
 $\therefore \angle EAF = \angle FAM = \angle FAB + \angle MAB$
 $= \angle FAB + \angle DAE$,
 又 $\because \angle EAF + \angle DAE + \angle FAB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle EAF = 45^\circ$, 故①正确 .
 $\therefore \angle EFA = \angle AFM$,
 $\therefore FA$ 平分 $\angle EFB$, 故②正确 .
 $\therefore \triangle DAE \cong \triangle BAM$,
 $\therefore \angle DEA = \angle BMA$,
 $\therefore \triangle AEF \cong \triangle AMF$,
 $\therefore \angle AEF = \angle AMB$,
 $\therefore \angle DEA = \angle AEF$, $\therefore EA$ 平分 $\angle DEF$, 故③正确 .

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

5. 如图，已知：正方形 $ABCD$ 中， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交线段 CB 、 DC 于点 M 、 N .



(1) 求证： $BM + DN = MN$.

(2) 求证: $C_{\triangle CMN} = 2AB$.

(3) 求证: $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ADN}$.

(4) 求证: AM 平分 $\angle BMN$.

(5) 求证: 过点 A 作 $AH \perp MN$, 垂足为 H , 求证: $AH = AB$.

【答案】(1) 证明见解析.

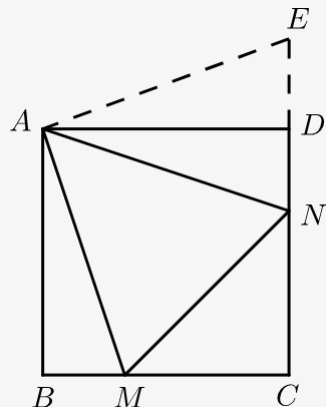
(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

(4) 证明见解析.

(5) 证明见解析.

【解析】(1) 延长 ND 到 E 使 $DE = BM$



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD = AB$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABM$,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle ADE = \angle B \\ DE = BM \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABM$,

$\therefore AM = AE, \angle BAM = \angle DAE$.

$\therefore \angle MAN = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAM + \angle NAD = 45^\circ$,

$\therefore \angle MAN = \angle EAN = 45^\circ$,

在 $\triangle AMN$ 和 $\triangle AEN$ 中

$$\begin{cases} MA = EA \\ \angle MAN = \angle EAN \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AEN$,

$\therefore MN = EN$,

$$\therefore DE + DN = BM + DN = MN .$$

$$(2) \because MN = BM + DN ,$$

$$\therefore CM + CN + MN = BC + CD = 2AB ,$$

$$\therefore C_{\triangle CMN} = 2AB .$$

$$(3) \because \triangle ADE \cong \triangle ABM ,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABM} ,$$

$$\because \triangle AMN \cong \triangle AEN .$$

$$\therefore S_{\triangle AMN} = S_{\triangle AEN} ,$$

$$\therefore S_{\triangle AEN} = S_{\triangle ADN} + S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ADN} + S_{\triangle ABM} .$$

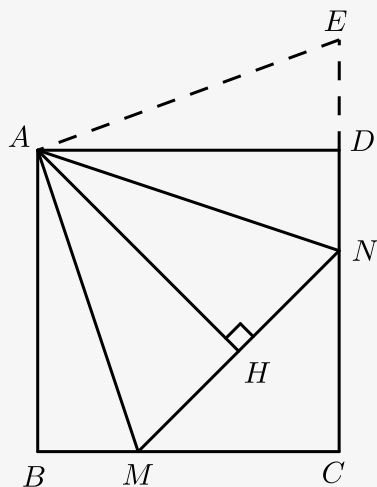
$$(4) \because \triangle EAM \cong \triangle NAM ,$$

$$\therefore \angle EMA = \angle NMA .$$

即AM平分 $\angle BMN$.

$$(5) \because \triangle ABM \cong \triangle AHM (AAS) ,$$

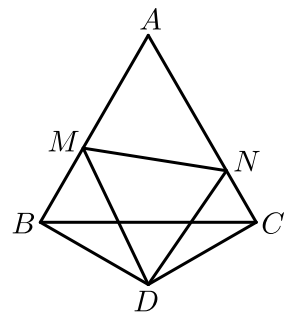
$$\therefore AH = AB .$$



【标注】【知识点】半角模型

练习2

6. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形， $\triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$. 以D为顶点作一个 60° 角，使其两边分别交AB于点M，交AC于点N，连接MN，则 $\triangle AMN$ 的周长为 _____ .



【答案】 6

【解析】 $\because \triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle DBC = \angle BCD = 30^\circ,$$

$\because \triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle DCA = 90^\circ,$$

延长 AB 至 F ，使 $BF = CN$ ，连接 DF ，

$$\therefore BF = CN, DB = DC,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDF \cong \text{Rt}\triangle CDN,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle CDN,$$

$$DF = DN,$$

$$\therefore \angle MDN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDM + \angle CDN = 60^\circ$$

,

$$\therefore \angle BDM + \angle BDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FDM = \angle MDN = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle DMN \cong \triangle DMF,$$

$$\therefore MN = MF,$$

$\therefore \triangle AMN$ 的周长

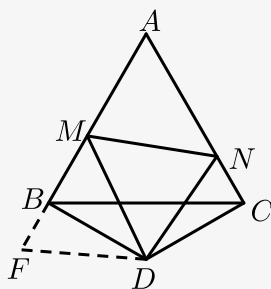
$$= AM + MN + AN$$

$$= AM + MB + BF + AN$$

$$= AM + MB + CN + AN$$

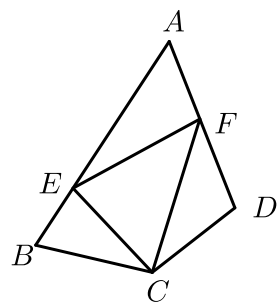
$$= AB + AC$$

$$= 6.$$



【标注】【知识点】多边形中的半角模型

7. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $BC = CD$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ， E ， F 分别为 AB ， AD 上的点， $\angle ECF = \angle A = 60^\circ$ 。



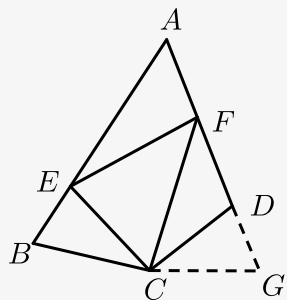
- (1) 求证： $EF = BE + DF$ 。
 (2) 求证：点 C 在 $\angle BAD$ 的平分线上。

【答案】 (1) 证明见解析。

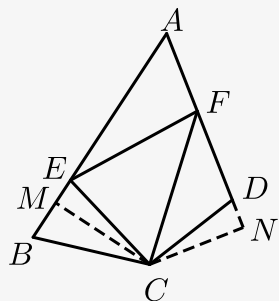
(2) 证明见解析。

【解析】 (1) 延长 FD 至 G ，使 $DG = BE$ ，连接 CG 。

$$\begin{aligned} \because \angle A + \angle BCD &= 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ, \\ \therefore \angle B + \angle ADC &= 180^\circ. \\ \therefore \angle CDG &= \angle B, \\ \therefore \triangle CBE &\cong \triangle CDG (\text{SAS}). \\ \therefore CG &= CE, \angle DCG = \angle BCE, \\ \therefore \angle ECG &= \angle BCD = 120^\circ = 2\angle ECF, \\ \therefore \angle ECF &= \angle GCF, \\ \therefore \triangle ECF &\cong \triangle GCF (\text{SAS}). \\ \therefore EF &= GF = DG + DF = BE + DF. \end{aligned}$$



- (2) 如图所示过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ， $CN \perp AD$ 于点 N ，



$\because \angle BCD = 120^\circ, \angle A = 60^\circ,$
 $\therefore \angle BCD + \angle A = 180^\circ,$
 $\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ,$
 $\because \angle CDN + \angle ADC = 180^\circ,$
 $\therefore \angle B = \angle CDN,$
 在 $\triangle BCM$ 和 $\triangle DCN$ 中,
 $\because \angle B = \angle CDN,$
 $\angle CMB = \angle CND = 90^\circ, BC = CD,$
 $\therefore \triangle BCM \cong \triangle DCN,$
 $\therefore CM = CN,$
 $\therefore$ 点 C 在 $\angle BAD$ 的平分线上.
 (或利用 CE 平分 $\angle BEF, CF$ 平分 $\angle EFD$ 说明也可)

【标注】【知识点】半角模型

8. 在等边三角形 ABC 的两边 AB 、 AC 所在直线上分别有两点 M 、 N ， D 为三角形 ABC 外一点，且 $\angle MDN = 60^\circ, \angle BDC = 120^\circ, BD = DC$. 探究：当 M 、 N 分别在直线 AB 、 AC 上移动时， BM 、 NC 、 MN 之间的数量关系.

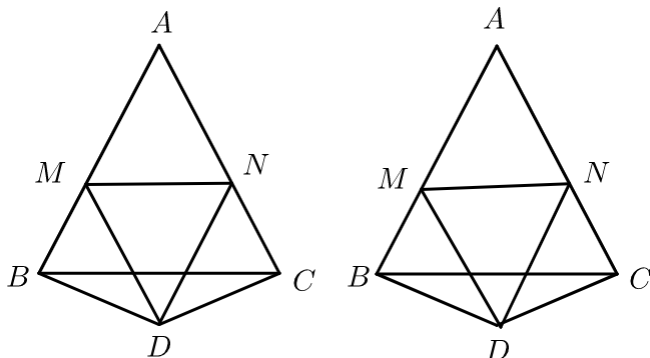


图1

图2

- (1) 如图1，当点 M 、 N 在边 AB 、 AC 上，且 $DM = DN$ 时， BM 、 NC 、 MN 之间的数量关系是？
 (2)

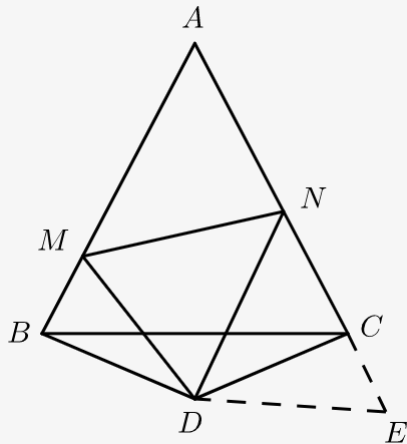
如图2，点 M 、 N 在边 AB 、 AC 上，且当 $DM \neq DN$ 时，猜想（1）问的结论还成立吗？写出你的猜想并加以证明。

【答案】（1） $BM + NC = MN$ 。

（2）猜想：结论仍然成立。证明见解析

【解析】（1） $BM + NC = MN$

（2）如图，延长 AC 至 E ，使 $CE = BM$ ，连接 DE 。



$\because BD = CD$ 且 $\angle BDC = 120^\circ$ 。

$\therefore \angle DBC = \angle DCB = 30^\circ$ 。

又 $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle MBD = \angle NCD = \angle ECD = 90^\circ$ 。

在 $\triangle MBD$ 与 $\triangle ECD$ 中：

$$\begin{cases} BM = CE \\ \angle MBD = \angle ECD \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle MBD \cong \triangle ECD$ (SAS)。

$\therefore DM = DE, \angle BDM = \angle CDE$

$\therefore \angle EDN = \angle BDC - \angle MDN = 60^\circ$

在 $\triangle MDN$ 与 $\triangle EDN$ 中：

$$\begin{cases} DM = DE \\ \angle MDN = \angle EDN \\ DN = DN \end{cases}$$

$\therefore \triangle MDN \cong \triangle EDN$ (SAS)

$\therefore MN = NE = NC + BM$

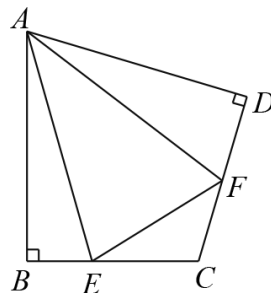
【标注】【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】等边三角形的性质

练习3

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ ， $BE = 2$ ， $DF = 3$ ，则 EF 的值为 _____ .



【答案】5

【解析】延长 EB 到 G ，使 $BG = DF$ ，连接 AG .

$$\because \angle ABG = \angle ABC = \angle D = 90^\circ, AB = AD,$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF.$$

$$\therefore AG = AF, \angle 1 = \angle 2.$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD.$$

$$\therefore \angle GAE = \angle EAF. \text{ 又 } AE = AE,$$

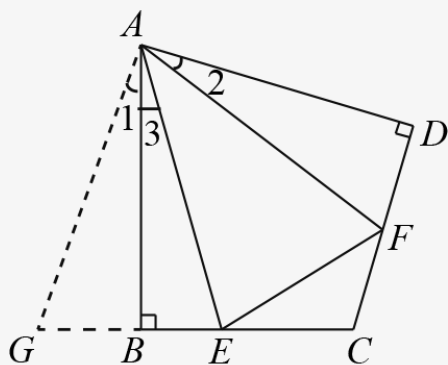
$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF.$$

$$\therefore EG = EF.$$

$$\therefore EG = BE + BG.$$

$$\therefore EF = BE + FD.$$

故答案：5 .

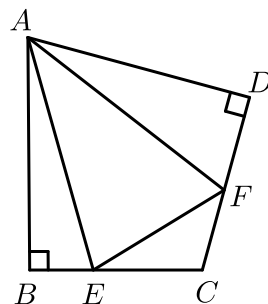


【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

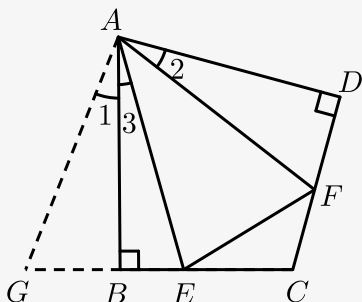
10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ ，则 EF 和 BE ， FD 的关系是（ ）。



- A. $EF = 2BE - \frac{1}{2}FD$ B. $EF = BE + FD$ C. $EF = 3BE - FD$ D. $EF = \frac{1}{2}BE + 2FD$

【答案】B

【解析】延长 EB 到 G ，使 $BG = DF$ ，连接 AG 。



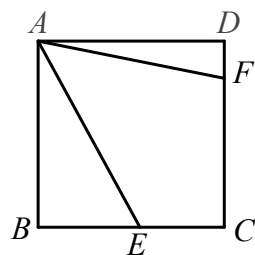
$\because \angle ABG = \angle ABC = \angle D = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ，
 $\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF$ 。
 $\therefore AG = AF$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。
 $\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ 。
 $\therefore \angle GAE = \angle EAF$ 。
 又 $AE = AE$ ，
 $\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF$ 。
 $\therefore EG = EF$ 。
 $\therefore EG = BE + BG$ ，
 $\therefore EF = BE + FD$ 。

【标注】【知识点】多边形中的半角模型

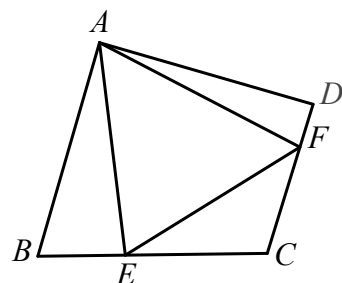
11. 完成下面问题。

(1) 如图, 点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上, $\angle EAF = 45^\circ$, 求证:

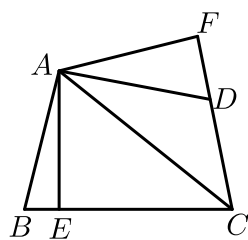
$$EF = BE + FD.$$



(2) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD \neq 90^\circ$, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, 点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上, 则当 $\angle EAF$ 与 $\angle BAD$ 满足什么关系时, 仍有 $EF = BE + FD$, 说明理由.



(3) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD \neq 90^\circ$, $AB = AD$, AC 平分 $\angle BCD$, $AE \perp BC$ 于 E , $AF \perp CD$ 交 CD 延长线于 F , 请直接写出线段 BC 、 CD 与 CE 之间的数量关系为 _____ (不需证明).

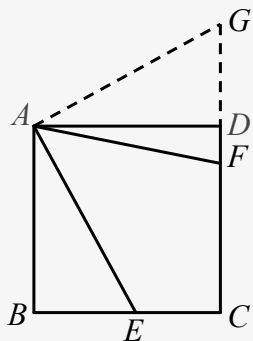


【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\angle BAD = 2\angle EAF$; 证明见解析.

(3) $BC + CD = 2CE$

【解析】 (1) 把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$, 如图所示:



则 $\triangle ADG \cong \triangle ABE$,

$\therefore AG = AE, \angle DAG = \angle BAE, DG = BE$,

又 $\because \angle EAF = 45^\circ$, 即 $\angle DAF + \angle BEA = \angle EAF = 45^\circ$,

$\therefore \angle GAF = \angle FAE$,

在 $\triangle GAF$ 和 $\triangle FAE$ 中, $\begin{cases} AG = AE \\ \angle GAF = \angle FAE \\ AF = AF \end{cases}$,

$\therefore \triangle AFG \cong \triangle AFE$ (SAS).

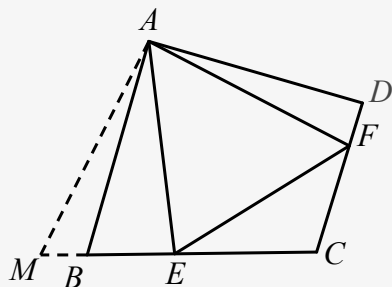
$\therefore GF = EF$.

又 $\because DG = BE$,

$\therefore GF = BE + DF$,

$\therefore BE + DF = EF$.

(2) 如图所示, 延长 CB 至 M , 使 $BM = DF$, 连接 AM ,



$\because \angle ABC + \angle D = 180^\circ, \angle ABC + \angle ABM = 180^\circ$,

$\therefore \angle D = \angle ABM$,

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ADF$ 中, $\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABM = \angle D \\ BM = DF \end{cases}$,

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADF$ (SAS)

$\therefore AF = AM, \angle DAF = \angle BAM$,

$\therefore \angle BAD = 2\angle EAF$,

$\therefore \angle DAF + \angle BAE = \angle EAF$,

$\therefore \angle EAB + \angle BAM = \angle EAM = \angle EAF$,

$$\text{在}\triangle FAE\text{和}\triangle MAE\text{中}, \begin{cases} AE = AE \\ \angle FAE = \angle MAE, \\ AF = AM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FAE \cong \triangle MAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore EF = EM = BE + BM = BE + DF,$$

$$\text{即 } EF = BE + DF.$$

$$(3) \because AC \text{ 平分 } \angle BCD, AE \perp BC, AF \perp CD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ, AE = AF,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 和 Rt}\triangle ADF \text{ 中}, \begin{cases} AB = AD \\ AE = AF \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ADF (\text{HL}),$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\text{同理: Rt}\triangle ACE \cong \text{Rt}\triangle ACF,$$

$$\therefore CE = CF,$$

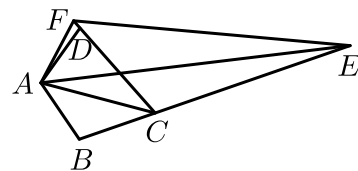
$$\therefore BC + CD = BE + CE + CF - DF = 2CE;$$

$$\text{故答案为: } BC + CD = 2CE.$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

练习4

12. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$, E 、 F 分别是边 BC 、 CD 延长线上的点, $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, 若 $DF = 1$, $BE = 5$, 则线段 EF 的长为 ().



A. 3

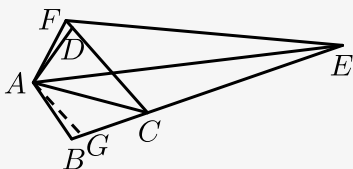
B. 4

C. 5

D. 6

【答案】B

【解析】



如图, 在 BE 上截取 $BG = DF$, 可证 $\triangle ADF \cong \triangle ABG$, 再证 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$,

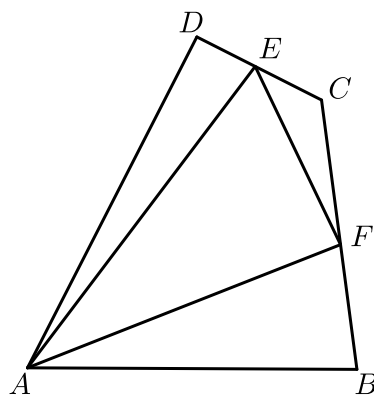
$$\therefore EF = EG = BE - BG = BE - DF = 4.$$

故选B.

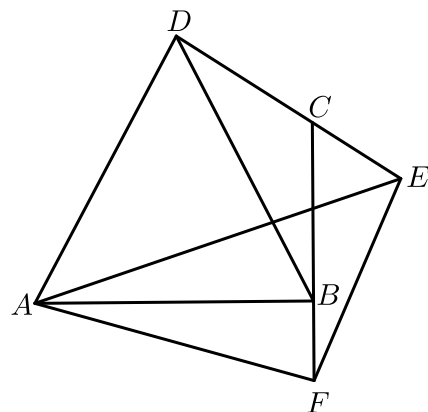
【标注】【知识点】多边形中的半角模型

13. 已知，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ， $\angle EAF = 30^\circ$ ， AE 、 AF 分别交射线 DC 、射线 CB 于点 E 、 F 。

(1) 如图，求证： $EF = DE + BF$ 。



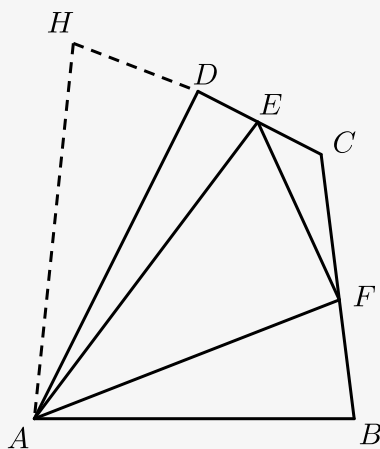
(2) 如图，求证： $DE - BF = EF$ 。



【答案】(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

【解析】(1) 如图



延长 CD 到 H 点,使 $DH = BF$,连接 AH ,

$$\because \angle BAD = 60^\circ, \angle BCD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle B = 180^\circ,$$

$$\because \angle ADE + \angle ADH = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle B,$$

$$\because AD = AB, DH = BF,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ADH$ 和 $\triangle ABF$ 中,

$$\begin{cases} DH = BF \\ \angle ADH = \angle B \\ AD = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADH \cong \triangle ABF (\text{SAS}),$$

$$\therefore AH = AF, \angle HAD = \angle FAB$$

$$\because \angle DAB = 60^\circ, \angle FAE = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DAE + \angle BAF = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DAE + \angle HAD = 30^\circ, \text{即} \angle HAE = 30^\circ$$

在 $\triangle HAE$ 和 $\triangle EAF$ 中,

$$\begin{cases} AH = AF \\ \angle HAE = \angle EAF, \\ AE = AE \end{cases}$$

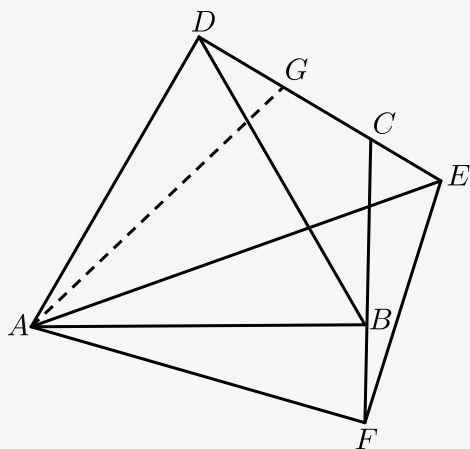
$$\therefore \triangle HAE \cong \triangle EAF (\text{SAS}),$$

$$\therefore HE = EF,$$

$$\because HE = HD + DE = BF + DE,$$

$$\therefore EF = DE + BF.$$

(2) 如图:



在边 DE 上截取 $DG = BF$,

$$\therefore \angle DAB = 60^\circ, \angle BCD = 120^\circ$$

$$\therefore \angle ADC + \angle CBA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ABF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ABF,$$

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle ABF$ 中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle ADG = \angle ABF \\ DG = BF \end{cases}$$

$$\triangle ADG \cong \triangle ABF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DAG = \angle BAF,$$

$$\therefore \angle EAF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle FAE,$$

$$\therefore \triangle GAE \cong \triangle FAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore DE - BF = EF.$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

14. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $BC \perp CD$, $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle MBN = 60^\circ$, $\angle MBN$ 绕 B 点旋转, 它的两边分别交 AD , DC (或它们的延长线) 于 E , F .

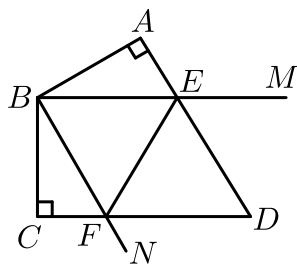


图1

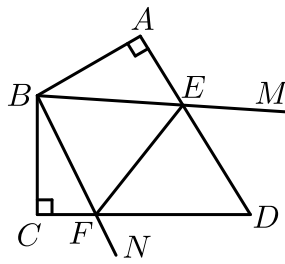


图2

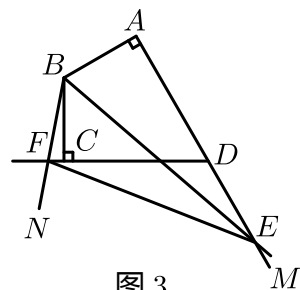


图3

- (1) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE = CF$ 时 (如图1), 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CBF$.

- (2) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到 $AE \neq CF$ 时(如图2), 猜想线段 AE, CF, EF 有怎样的数量关系, 并证明你的猜想.
- (3) 当 $\angle MBN$ 绕 B 点旋转到图3这种情况下, 猜想线段 AE, CF, EF 有怎样的数量关系, 并证明你的猜想.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $EF = AE + CF$.

(3) $EF = AE - CF$.

【解析】(1) $\because AB \perp AD, BC \perp CD,$

$$\therefore \angle BAE = \angle BCF = 90^\circ,$$

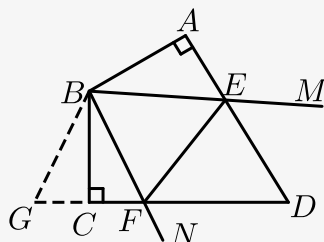
$\therefore$ 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$AB = BC, \angle BAE = \angle BCF, AE = CF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF \text{ (SAS)} .$$

(2) 猜想 $EF = AE + CF$,

如图，将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 顺时针旋转 120° ，



$$\because AB = BC, \angle ABC = 120^\circ,$$

$\therefore A$ 点与 C 点重合,

$$\therefore BG = BE, FG = CG + CF = AE + CF,$$

$$\because \angle ABC = 120^\circ, \angle MBN = 60^\circ, \angle ABE = \angle CBG,$$

$$\therefore \angle GBF = 60^\circ,$$

在 $\triangle GBF$ 和 $\triangle EBF$ 中,

$$BG = BE, \angle GBF = \angle EBF = 60^\circ, BF = BF,$$

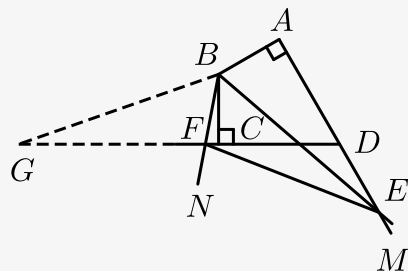
$$\therefore \triangle GBF \cong \triangle EBF \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore FG = EF,$$

$$\therefore EF = AE + CF .$$

(3) 猜想 $EF = AE - CF$,

如图, 将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 顺时针旋转 120° ,



$\because AB = BC, \angle ABC = 120^\circ,$
 $\therefore A \text{ 点与 } C \text{ 点重合}, \angle ABE = \angle CBG,$
 $\therefore BG = BE, FG = CG - CF = AE - CF,$
 $\because \angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = 120^\circ,$
 $\therefore \angle CBG + \angle CBE = \angle GBE = 120^\circ,$
 $\because \angle MBN = 60^\circ,$
 $\therefore \angle GBF = 60^\circ,$
 在 $\triangle BFG$ 和 $\triangle BFE$ 中,

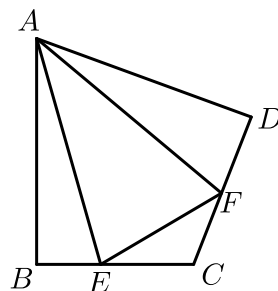
$$\begin{cases} BG = BE \\ \angle GBF = \angle EBF = 60^\circ, \\ BF = BF \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BFG \cong \triangle BFE \text{ (SAS)},$
 $\therefore GF = EF,$
 $\therefore EF = AE - CF.$

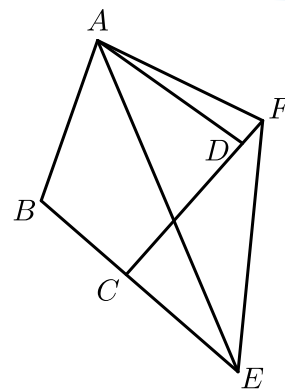
【标注】【知识点】旋转型全等

15. 探索：

- (1) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD, \angle B = \angle D = 90^\circ$ ， $E、F$ 分别是边 $BC、CD$ 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ 。求证： $EF = BE + FD$ 。



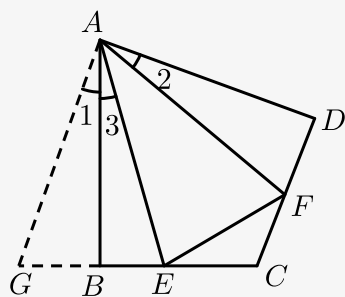
- (2) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD, \angle B + \angle ADC = 180^\circ$ ， $E、F$ 分别是边 $BC、CD$ 延长线上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ 。(1) 中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请写出它们之间的数量关系，并证明。



【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 结论 $EF = BE + FD$ 不成立 , 应当是 $EF = BE - FD$.

【解析】(1) 延长 EB 到 G , 使 $BG = DF$, 连接 AG ,



$$\because \angle ABG = \angle ABC = \angle D = 90^\circ ,$$

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle ADF$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABG = \angle ADF , \\ BG = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF (SAS) ,$$

$$\therefore AG = AF, \angle 1 = \angle 2 ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD ,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle EAF ,$$

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle AEF$ 中 ,

$$\begin{cases} AE = AE \\ \angle EAF = \angle GAE , \\ AF = AG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF (SAS) ,$$

$$\therefore EG = EF ,$$

$$\therefore EG = BE + BG ,$$

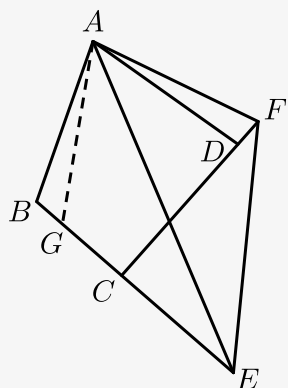
$$\therefore EF = BE + FD .$$

(2) 结论 $EF = BE + FD$ 不成立 ,

应当是 $EF = BE - FD$,

证明：在 BE 上截取 BG 使 $BG = DF$ ，

连接 AG ，



$$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ, \angle ADF + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADF,$$

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle ADF$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle B = \angle ADF, \\ BG = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF (SAS),$$

$$\therefore \angle BAG = \angle DAF, AG = AF,$$

$$\therefore \angle BAG + \angle EAD = \angle DAF + \angle EAD = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle EAF,$$

$$\text{又} \because AE = AE,$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF,$$

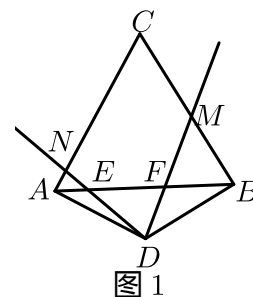
$$\therefore EG = EF,$$

$$\text{又} \because EG = BE - BG,$$

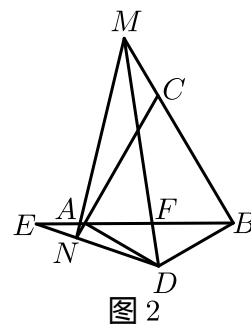
$$\therefore EF = BE - FD.$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

16. 四边形 $ABCD$ 是由等边 $\triangle ABC$ 和顶角为 120° 的等腰 $\triangle ABD$ 拼成，将一个 60° 角顶点放在 D 处，将 60° 角绕 D 点旋转，该 60° 角两边分别交直线 BC 、 AC 于 M 、 N ，交直线 AB 于 E 、 F 两点，
(1) 当 E 、 F 分别在边 AB 上时（如图1），求证： $BM + AN = MN$ 。



(2) 当 E 、 F 分别在边 BA 的延长线上时如图 2，求线段 BM 、 AN 、 MN 之间又有怎样的数量关系 _____ 。



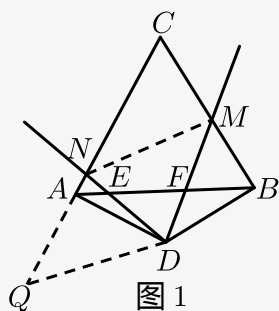
(3) 在 (1) 的条件下，若 $AC = 5$ ， $AE = 1$ ，求 BM 的长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $MN + AN = BM$ 。

(3) 3。

【解析】 (1) 把 $\triangle DBM$ 绕点 D 逆时针旋转 120° 得到 $\triangle DAQ$ ，
则 $DM = DQ$ ， $AQ = BM$ ， $\angle ADQ = \angle BDM$ ，



$$\begin{aligned} \because \angle QDN &= \angle ADQ + \angle ADN \\ &= \angle BDM + \angle ADN \\ &= \angle ABD - \angle MDN \\ &= 120^\circ - 60^\circ \\ &= 60^\circ, \\ \therefore \angle QDN &= \angle MDN = 60^\circ, \\ \therefore \text{在 } \triangle DMN \text{ 和 } \triangle QND \text{ 中,} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} DM = DQ \\ \angle QDN = \angle MDN, \\ DN = DN \end{cases}$$

$\therefore \triangle MND \cong \triangle QND$ (SAS) ,

$\therefore MN = QN$,

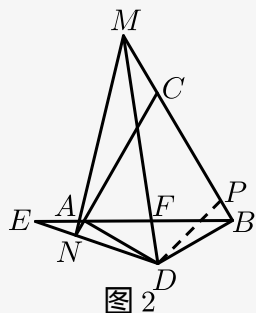
$\therefore QN = AQ + AN = BM + AN$,

$\therefore BM + AN = MN$.

(2) $MN + AN = BM$.

理由如下：如图，把 $\triangle DAN$ 绕点 D 顺时针旋转 120° 得到 $\triangle DBP$ ，

则 $DN = DP$ ， $AN = BP$ ，



$\therefore \angle DAN = \angle DBP = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 P 在 BM 上，

$\therefore \angle MDP = \angle ADB - \angle ADM - \angle BDP$

$= 120^\circ - \angle ADM - \angle ADN$

$= 120^\circ - \angle MDN$

$= 120^\circ - 60^\circ$

$= 60^\circ$

$\therefore \angle MDP = \angle MDN = 60^\circ$,

$\therefore$ 在 $\triangle MND$ 和 $\triangle MPD$ 中，

$$\begin{cases} DN = DP \\ \angle MDP = \angle MDN, \\ DM = DM \end{cases}$$

$\therefore \triangle MND \cong \triangle MPD$ (SAS) ,

$\therefore MN = MP$,

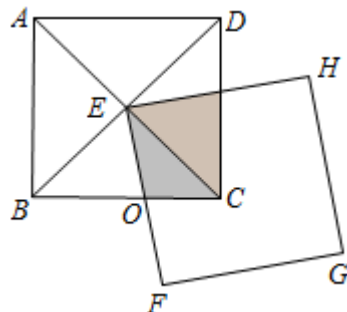
$\therefore BM = MP + BP$,

$\therefore MN + AN = BM$.

(3) 如图，过点 M 作 $MH \parallel AC$ 交 AB 于 G ，交 DN 于 H ，

练习5

17. 已知：如图，正方形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 的边长都等于1，点 E 恰好是 AC 、 BD 的交点，则两个正方形的重叠部分（阴影部分）的面积是 _____ 。



【答案】 $\frac{1}{4}$ 或 0.25

【解析】 如图所示，

$$\because EH \perp EF,$$

$\therefore$

$$\angle CEH + \angle CEF = 90^\circ$$

,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AC \perp BD, \angle EBC = \angle ECD = 45^\circ, EB = EC,$$

$$S_{\triangle BEC} = S_{\triangle CED} = S_{\triangle AED} = S_{\triangle AEB},$$

$$\therefore \angle BEF + \angle CEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle CEH,$$

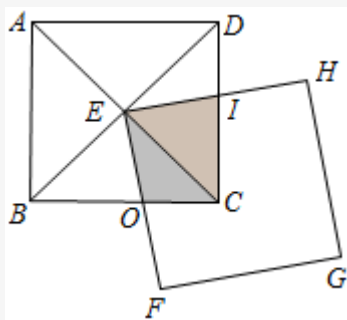
在 $\triangle BEO$ 和 $\triangle CEI$ 中

$$\begin{cases} \angle EBC = \angle ECD \\ EB = EC \\ \angle BEF = \angle CEH \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BEO \cong \triangle CEI.$$

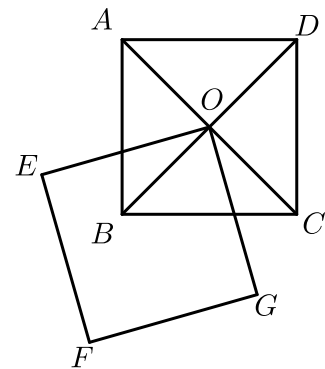
$$\therefore S_{\triangle CEI} = S_{\triangle BEO},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = 1 \times 1 \div 4 = \frac{1}{4}.$$



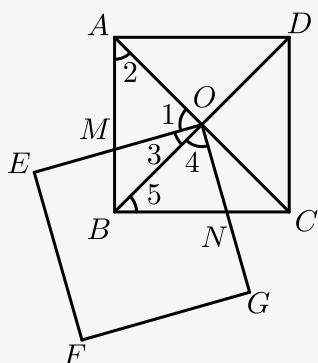
【标注】 【知识点】 正方形中的半角模型

18. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线交于 O 点，点 O 是正方形 $EFGO$ 的一个顶点，正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGO$ 的边长分别为2cm和2.5cm，两个正方形重叠的面积是 _____ 。



【答案】1

【解析】



∵ 四边形 $ABCD$ 和 四边形 $EFGO$ 都是正方形，

∴ $\angle 2 = \angle 5 = 45^\circ$ ， $\angle 1 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$ ，

∴ $\angle 1 = \angle 4$ ，

∴ 在 $\triangle AMO$ 和 $\triangle BNO$ ，

$$\begin{cases} \angle 2 = \angle 5 \\ AO = BO, \\ \angle 1 = \angle 4 \end{cases}$$

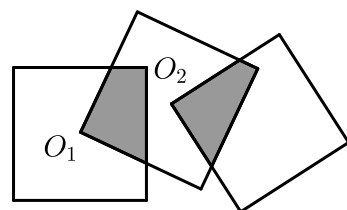
∴ $\triangle AMO \cong \triangle BNO (ASA)$ ，

∴ 两个正方形重叠的面积等于 $\triangle ABO$ 的面积 $= \frac{1}{4} S_{\text{四边形} ABCD} = 1$ 。

故答案为：1。

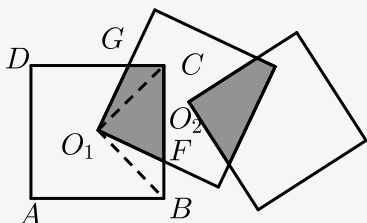
【标注】【知识点】对角互补模型

19. 如图，三个边长均为2的正方形重叠在一起， O_1 、 O_2 是其中两个正方形的中心，则阴影部分的面积是_____。



【答案】2

【解析】连接 O_1B 、 O_1C ，如图：



$$\because \angle BO_1F + \angle FO_1C = 90^\circ, \angle FO_1C + \angle CO_1G = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BO_1F = \angle CO_1G,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle O_1BF = \angle O_1CG = 45^\circ,$$

在 $\triangle O_1BF$ 和 $\triangle O_1CG$ 中，

$$\begin{cases} \angle FO_1B = \angle CO_1G \\ BO_1 = CO_1 \\ \angle FBO_1 = \angle GCO_1 \end{cases},$$

$$\therefore \triangle O_1BF \cong \triangle O_1CG (ASA),$$

$$\therefore O_1、O_2 \text{ 两个正方形阴影部分的面积是 } \frac{1}{4} S_{\text{正方形}},$$

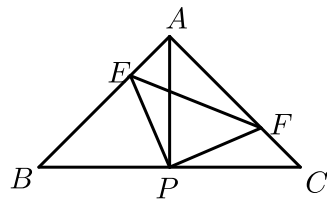
$$\text{同理另外两个正方形阴影部分的面积也是 } \frac{1}{4} S_{\text{正方形}},$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = \frac{1}{2} S_{\text{正方形}} = 2.$$

【标注】【知识点】对角互补模型

练习6

20. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 中点，两边 PE ， PF 分别交 AB ， AC 于点 E ， F ，给出以下四个结论：① $\triangle PFA \cong \triangle PEB$ ，② $EF = AP$ ，③ $\triangle PEF$ 是等腰直角三角形，④ $S_{\text{四边形}AEPF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ ，当 $\angle EPF$ 在 $\triangle ABC$ 内绕顶点 P 旋转时（点 E 不与 A ， B 重合），上述结论中始终正确有（ ）。



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】C

【解析】 $\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$

直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 的中点,

$$\therefore AP \perp BC, AP = \frac{1}{2}BC = PB, \angle B = \angle CAP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle APF + \angle APE = 90^\circ, \angle APE + \angle BPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPE = \angle APF,$$

在 $\triangle BPE$ 和 $\triangle APF$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle CAP \\ BP = AP \\ \angle BPE = \angle APF \end{cases},$$

$\therefore \triangle PFA \cong \triangle PEB$ (ASA), 即结论①正确.

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, P 是 BC 的中点,

$$\therefore AP = \frac{1}{2}BC,$$

又 $\because EF$ 不一定是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore EF \neq AP$, 故结论②错误.

$$\therefore \triangle PFA \cong \triangle PEB,$$

$$\therefore PE = PF,$$

$$\text{又} \because \angle EPF = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle PEF$ 是等腰直角三角形, 故结论③正确.

$$\therefore \triangle PFA \cong \triangle PEB,$$

$$\therefore S_{\triangle PFA} = S_{\triangle PEB},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} AEPF} = S_{\triangle APE} + S_{\triangle APF}$$

$$= S_{\triangle APE} + S_{\triangle BPE}$$

$$= S_{\triangle APB}$$

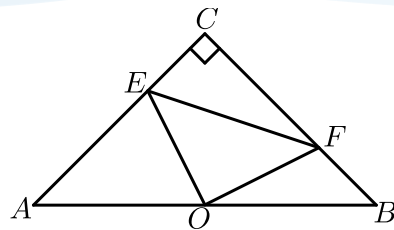
$$= \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}, \text{故结论④正确.}$$

综上, 当 $\angle EPF$ 在 $\triangle ABC$ 内绕顶点 P 旋转时 (点 E 不与 A, B 重合), 始终正确的有3个结论.

故选: C.

【标注】【知识点】对角互补模型

21. 如图, 等腰 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, AC = BC$, 点 O 是 AB 的中点, 点 E 是线段 AC 上的一动点, $FO \perp EO$, 交 CB 于点 F .



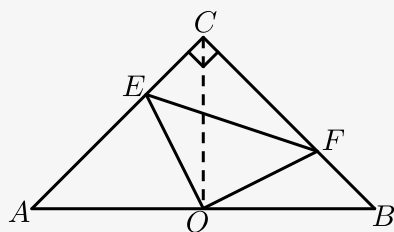
(1) 求证： $BF = CE$.

(2) 若 $AC = 4$, 求四边形 $CEOF$ 的面积 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 4 .

【解析】 (1) 连接 CO ,



$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = BC,$$

$$\therefore CO = BO, \angle COB = 90^\circ, \angle ACO = \angle B = 45^\circ,$$

$$\because \angle EOC + \angle COF = 90^\circ, \angle BOF + \angle COF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOC = \angle BOF,$$

在 $\triangle OCE$ 和 $\triangle OBF$ 中

$$\begin{cases} \angle EOC = \angle BOF \\ OC = OB \\ \angle ACO = \angle B = 45^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle OCE \cong \triangle OBF, (\text{ASA}),$$

$$\therefore BF = CE.$$

$$(2) \because \triangle OCE \cong \triangle OBF,$$

$$\therefore S_{\triangle OCE} = S_{\triangle OBF},$$

$\therefore$ 四边形 $CEOF$ 的面积

$$= S_{\triangle OCE} + S_{\triangle COF} = S_{\triangle OBF} + S_{\triangle COF} = S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

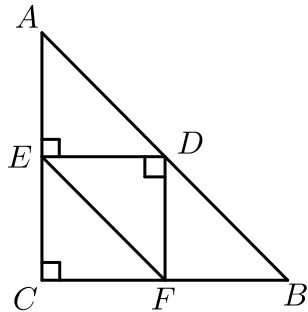
$$\because AC = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8,$$

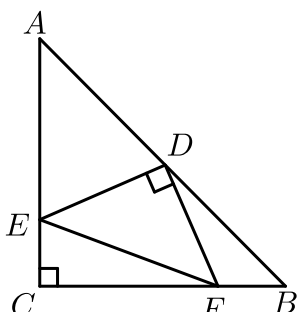
$$\therefore \text{四边形} CE OF \text{的面积} = 4.$$

【标注】【知识点】全等三角形的周长与面积

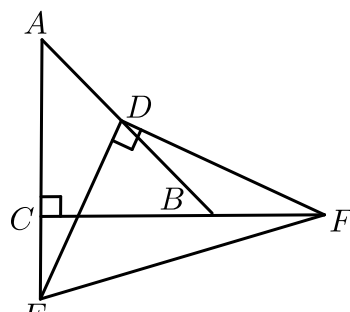
22. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 为 AB 边中点, $\angle EDF = 90^\circ$, $\angle EDF$ 绕点 D 旋转, 它的两边分别交 AC , CB (或它们的延长线) 于点 E , F , 当 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转到 $DE \perp AC$ 于点 E 时 (如图所示), 易证 $S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$. 当 $\angle EDF$ 绕点 D 旋转到 DE 和 AC 不垂直时, 在图②和图③这两种情况下, 上述结论是否还成立? 若成立, 请给予证明; 若不成立, $S_{\triangle DEF}$, $S_{\triangle CEF}$, $S_{\triangle ABC}$ 又有怎样的数量关系? 请写出你的猜想, 不需证明.



图①



图②

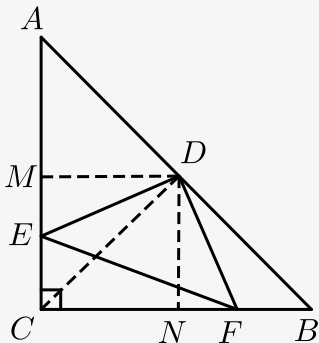


图③

【答案】 证明见解析.

【解析】 (1) 在图②中, $S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ 这一结论仍然成立, 理由如下:

过点 D 作 $DM \perp AC$ 于点 M , $DN \perp BC$ 于点 N , 连接 CD ,



图②

$$\therefore \angle DME = \angle DNF = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDN = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle EDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDE + \angle EDN = \angle EDN + \angle NDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDE = \angle NDF,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 中, } \angle ACB = 90^\circ, \text{ 点 } D \text{ 是 } AB \text{ 的中点, } AC = BC,$$

$$\therefore CD = AD = BD, \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore DM \perp AC \text{ 于点 } M, DN \perp BC \text{ 于点 } N,$$

$$\therefore DM = \frac{1}{2} AC, DN = \frac{1}{2} BC,$$

$$\therefore DM = DN,$$

$$\therefore \triangle DME \cong \triangle DNF,$$

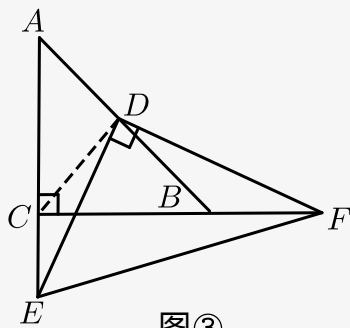
$$\therefore S_{\text{四边形}DMCN} = S_{\text{四边形}DECF} = S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF},$$

$$\therefore \text{由①中结论可知, } S_{\triangle DEF} + S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}.$$

$\therefore$ 在图②中, ①中结论仍然成立;

(2)在图③中, ①中结论不在成立, 此时 $S_{\triangle DEF} - S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, 理由如下:

如图③, 连接 CD ,



图③

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 为 AB 中点, $AC = BC$,

$\therefore CB = BD$, $\angle CDB = 90^\circ$, $\angle ACD = \angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore \angle EDF = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDE + \angle EDB = \angle EDB + \angle BDF$,

$\therefore \angle CDE = \angle BDF$,

$\therefore \triangle DCE \cong \triangle DBF$,

$$\therefore S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DBF} + S_{\text{四边形}DBFE}$$

$$= S_{\triangle DEC} + S_{\text{四边形}DBFE}$$

$$= S_{\text{五边形}DBFEC}$$

$$= S_{\triangle CEF} + S_{\triangle DBC}$$

$$= S_{\triangle CEF} + \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}.$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} - S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

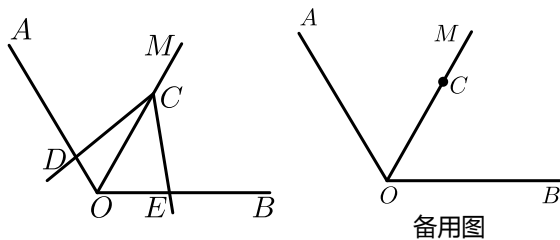
$\therefore$ 图③中, ①中的结论不在成立, 新的结论是: $S_{\triangle DEF} - S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

【标注】【知识点】对角互补模型

练习7

23. 如图, 已知 $\angle AOB = 120^\circ$, 在 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上有一点 C , 将一个 60° 角的顶点与点 C 重合, 它的两条边分别与直线 OA , OB 相交于点 D , E . 下列结论: (1) $CD = CE$; (2)

$OE + OD = OC$; (3) $OE - OD = OC$; (4) $OC = a, OD = b$, 则 $OE = |a - b|$; 其中正确的有 () .



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 A

【解析】 过点 C 作 $CN \perp OB$ 于 N 点, $CF \perp OA$ 于 F 点,

$\because OC$ 平分 $\angle AOB$, $\angle AOB = 120^\circ$, $CN \perp OB$, $CF \perp OA$,

$\therefore \angle AOC = \angle BOC = 60^\circ$, $CF = CN$,

$\therefore \angle OCF = \angle OCN = 30^\circ$,

$\therefore ON = \frac{1}{2}OC$, $OF = \frac{1}{2}OC$,

$\angle FCN = 360^\circ - \angle AOB - \angle CFO - \angle CNO$

$= 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ$

$= 60^\circ$,

$\therefore$ ①当 D, E 在射线 OA, OB 上时, 如图1,

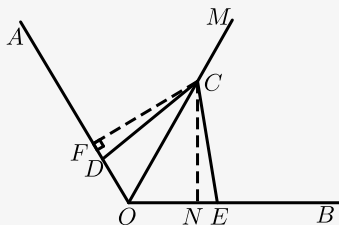


图1

$\therefore \angle FCN = \angle DCE = 60^\circ$,

$\therefore \angle FCN - \angle DCN = \angle DCE - \angle DCN$,

$\therefore \angle FCD = \angle ECN$,

$\therefore$ 在 $\triangle CFD$ 和 $\triangle CNE$ 中,

$$\begin{cases} \angle CFD = \angle CNE \\ CF = CN \\ \angle FCD = \angle ECN \end{cases},$$

$\therefore \triangle CFD \cong \triangle CNE$ (ASA),

$\therefore CD = CE$, $FD = NE$, 符合 (1),

$\therefore OE + OD = ON + NE + OD$

$= ON + DF + OD$

$$\begin{aligned}
&= ON + OF \\
&= \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OC \\
&= OC, \text{符合(2), 不符合(3),} \\
&\therefore OE = OC - OD = a - b, \text{(4)符合,}
\end{aligned}$$

②如图2, 当D在射线OA, E在射线OB上时,

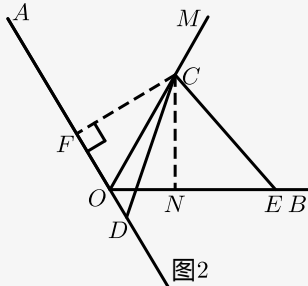


图2

$$\begin{aligned}
&\text{由①知, } \triangle CFD \cong \triangle CNE, \\
&\therefore CD = CE, DF = NE, \text{(1)符合,} \\
&\therefore OE = ON + NE \\
&= ON + DF \\
&= ON + OF + OD \\
&= \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OC + OD \\
&= OC + OD \\
&= a + b, \text{(4)不符合,} \\
&\therefore OE - OD = OC, \text{(2)不符合, (3)符合,}
\end{aligned}$$

③如图3, 当D在射线OA, E在射线NO上时,

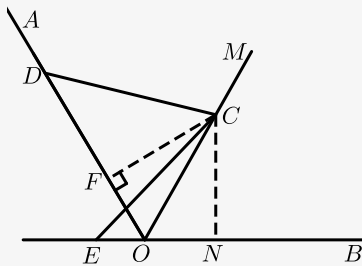


图3

$$\begin{aligned}
&\text{由①知, } \triangle CFD \cong \triangle CNE, \\
&\therefore CD = CE, DF = NE, \text{(1)符合,} \\
&\therefore OE = NE - ON \\
&= DF - ON \\
&= OD - OF - ON \\
&= OD - \frac{1}{2}OC - \frac{1}{2}OC \\
&= OD - OC
\end{aligned}$$

$$= b - a$$

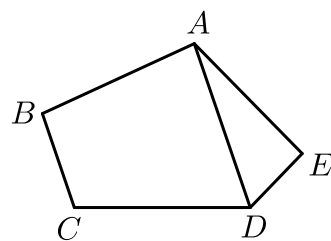
$$= |a - b|, (2), (3) \text{ 不符合}, (4) \text{ 符合},$$

$\therefore$ 综上, (1) 永远成立, (2) (3) (4) 均不成立,

$\therefore$ 故选A.

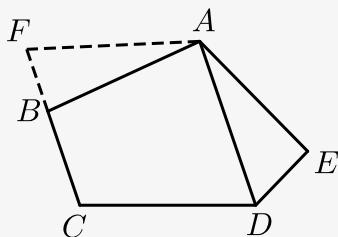
【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

24. 如图, 在五边形 $ABCDE$ 中, $AB = AE$, $BC = 2$, $DE = 1$, $\angle B + \angle E = 180^\circ$, $\angle BAE = 120^\circ$, 连接 AC , AD , $\angle CAD = 60^\circ$, 则 $CD = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 3

【解析】 延长 CB 至点 F , 使 $BF = DE$, 连接 AF ,



$$\because \angle B + \angle E = 180^\circ, \angle ABC + \angle ABF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle E,$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle ABF = \angle E, \\ BF = ED \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle AED \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AF = AD, \angle FAB = \angle DAE,$$

$$\because \angle BAE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle FAD = 120^\circ,$$

$$\because \angle CAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FAC = \angle CAD = 60^\circ,$$

在 $\triangle FAC$ 和 $\triangle DAC$ 中,

$$\begin{cases} AF = AD \\ \angle FAC = \angle DAC, \\ AC = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle FAC \cong \triangle DAC (\text{SAS})$,

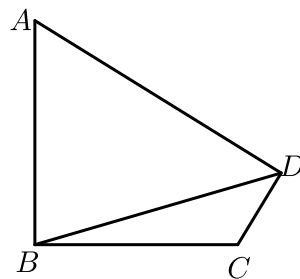
$\therefore FC = DC$,

$\therefore FC = FB + BC = DE + BC = 1 + 2 = 3$,

$\therefore DC = 3$.

【标注】【知识点】对角互补模型

25. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，连接 BD ，若 $AD + CD = 10$ ，四边形 $ABCD$ 的面积为 _____ .



【答案】25

【解析】延长 DA 至 H ，使得 $AH = CD$ ，连结 BH ，

$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$,

$\therefore \angle BAD + \angle BAH = 180^\circ$,

$\therefore \angle BCD = \angle BAH$,

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle BAH$ 中，

$$\begin{cases} BC = BA \\ \angle BCD = \angle BAH, \\ CD = AH \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BAH$,

$\therefore S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BAH}$,

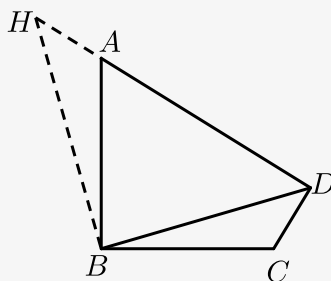
$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BAH} = S_{\triangle BDH}$,

$\therefore CD + AD = AH + AD = DH = 10$,

$\therefore BH = BD = 5\sqrt{2}$,

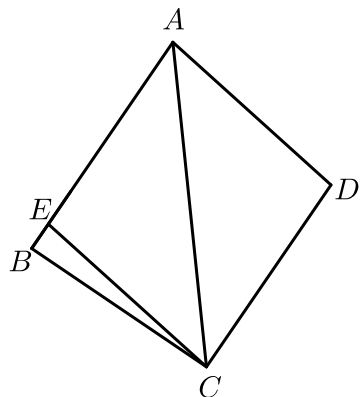
$\therefore S_{\triangle BDH} = \frac{1}{2} BH \cdot BD = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 25$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为25.



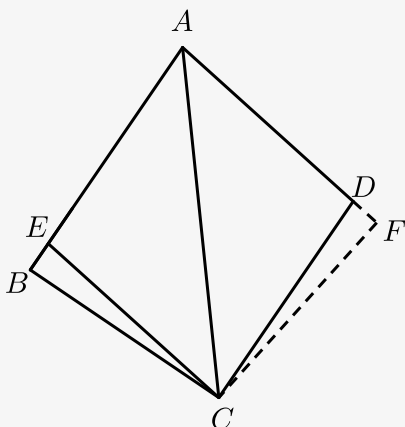
【标注】【知识点】对角互补模型

26. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 的对角互补, 且 $\angle BAC = \angle DAC$, $AB = 15$, $AD = 12$. 过顶点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , 则 $\frac{AE}{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 9

【解析】 如图, 过顶点 C 作 $CF \perp AD$ 于 F ,



又因为 $\angle BAC = \angle DAC$, $CE \perp AB$, 所以 $\triangle ACE \cong \triangle ACF$, 所以 $AE = AF$, $CE = CF$.

又 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, 所以 $\angle CDF = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC = \angle EBC$, 故 $\triangle BCE \cong \triangle DCF$, 所以 $BE = DF$.

而 $AB = AE + BE$, $AD = AF - DF$, 所以

$$AB + AD = AE + AF + BE - DF = 2AE, \text{ 所以 } AE = \frac{1}{2}(AB + AD) = 13.5,$$

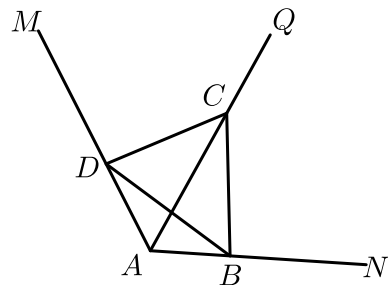
$$BE = AB - AE = 1.5, \text{ 所以 } \frac{AE}{BE} = \frac{13.5}{1.5} = 9.$$

故答案为: 9.

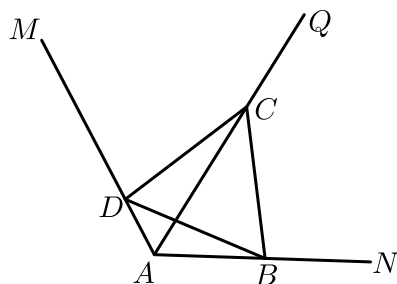
【标注】【知识点】对角互补模型; 全等三角形的对应边与角

27. 已知 $\angle MAN = 120^\circ$ ，点 C 是 $\angle MAN$ 的平分线 AQ 上的一个定点，点 B, D 分别在 AN, AM 上，连接 BD 。

(1) 如图，若 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，则 $\angle BCD = \underline{\quad\quad}^\circ$ ， $\triangle CBD$ 是 三角形。



(2) 如图，若 $\angle DCB = 60^\circ$ ，请判断 $\triangle CBD$ 的形状，并证明你的结论。



【答案】 (1) 60 ；等边

(2) $\triangle CBD$ 是等边三角形，证明见解析。

【解析】 (1) $\because CD \perp AM, CB \perp AN$,

$$\therefore CD = CB,$$

$$\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, \angle MAN = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 360^\circ - \angle ABC - \angle ADC - \angle MAN = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BCD$ 为等边三角形。

(2) 作 $CE \perp AN, CF \perp AM$ ，如图所示，

$$\because \angle MAN = 120^\circ, AC \text{ 平分 } \angle MAN, CE \perp AN, CF \perp AM,$$

$$\therefore CF = CE, \angle CFD = \angle CEB = 90^\circ = \angle CEA.$$

$$\therefore \angle FCE = 360^\circ - \angle MAN - \angle CFD - \angle CEA = 60^\circ.$$

$$\because \angle DCB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle DCB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE - \angle DCE = \angle DCB - \angle DCE,$$

$$\therefore \angle FCD = \angle ECB.$$

在 $\triangle CFD$ 和 $\triangle CEB$ 中，

$$\begin{cases} \angle FCD = \angle ECB \\ CF = CE \\ \angle CFD = \angle CEB \end{cases},$$

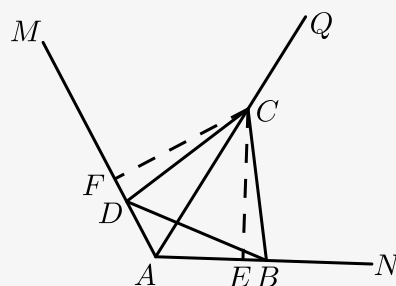
$\therefore \triangle CFD \cong \triangle CEB (\text{ASA})$.

$\therefore CD = CB$.

$\therefore \angle DCB = 60^\circ$,

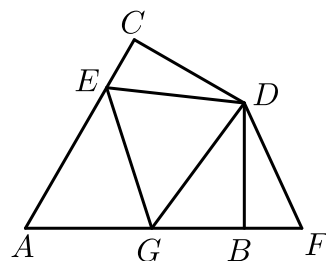
$\therefore \angle CDB = \angle CBD = \frac{180^\circ - \angle DCB}{2} = 60^\circ$,

$\therefore \triangle CBD$ 是等边三角形.



【标注】【知识点】等边三角形与全等

28. 在四边形 $ABDC$ 中, $AC = AB$, $DC = DB$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle CDB = 120^\circ$, E 是 AC 上一点, F 是 AB 延长线上一点, 且 $CE = BF$.



- (1) 试说明: $DE = DF$.
- (2) 在图中, 若 G 在 AB 上且 $\angle EDG = 60^\circ$, 试猜想 CE 、 EG 、 BG 之间的数量关系并证明所归纳结论.
- (3) 若题中条件 " $\angle CAB = 60^\circ$ 且 $\angle CDB = 120^\circ$ " 改为 $\angle CAB = \alpha$, $\angle CDB = 180^\circ - \alpha$, G 在 AB 上, $\angle EDG$ 满足什么条件时, (2) 中结论仍然成立? (只写结果不要证明).

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $CE + BG = EG$. 证明见解析.

(3) 当 $\angle EDG = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ 时, $CE + BG = EG$ 仍然成立.

【解析】 (1) $\because \angle CAB + \angle C + \angle CDB + \angle ABD = 360^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle CDB = 120^\circ$

$$\therefore \angle C + \angle ABD = 360^\circ - 60^\circ - 120^\circ = 180^\circ ,$$

$$\text{又} \because \angle DBF + \angle ABD = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle C = \angle DBF ,$$

在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle BDF$ 中 ,

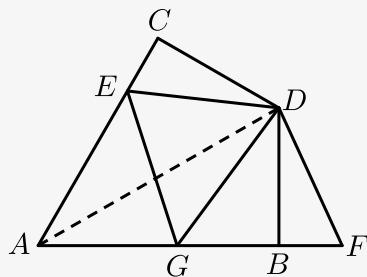
$$\begin{cases} CD = BD \\ \angle C = \angle DBF , \\ CE = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle BDF \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore DE = DF .$$

(2) 猜想 CE 、 EG 、 BG 之间的数量关系为 : $CE + BG = EG$.

证明 : 如图 , 连接 AD ,



在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AC \\ BD = CD , \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD \text{ (SSS)} ,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle CDA = \frac{1}{2} \angle CDB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ ,$$

$$\text{又} \because \angle EDG = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ADG , \angle ADE = \angle BDG ,$$

由(1) , 可得 $\triangle CDE \cong \triangle BDF$,

$$\therefore \angle CDE = \angle BDF ,$$

$$\therefore \angle BDG + \angle BDF = 60^\circ ,$$

$$\text{即} \angle FDG = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle EDG = \angle FDG .$$

在 $\triangle DEG$ 和 $\triangle DFG$ 中 ,

$$\begin{cases} DE = DF \\ \angle EDG = \angle FDG \\ DG = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DEG \cong \triangle DFG ,$$

$$\therefore EG = FG ,$$

$$\text{又} \because CE = BF , FG = BF + BG ,$$

$$\therefore CE + BG = EG .$$

(3) 要使 $CE + BG = EG$ 仍然成立 ,

$$\text{则 } \angle EDG = \angle BDA = \angle CDA = \frac{1}{2} \angle CDB ,$$

$$\text{即 } \angle EDG = \frac{1}{2} (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha ,$$

$$\therefore \text{当 } \angle EDG = 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha \text{ 时 , } CE + BG = EG \text{ 仍然成立 .}$$

【标注】【知识点】对角互补模型